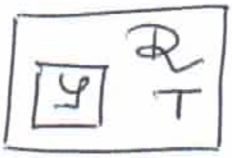
Corrigé partiel thermostatistique L3 SPC

Nov 2009

(II) 1) ensemble canonique



Tous les "copies" du système thermodynamique, en contact thermique avec un réservoir de température, forment l'ensemble statistique canonique. Chaque "copie" représente le système dans un des ses microétats. Le système thermodynamique est un système <u>fermé</u> pouvant échanger de l'énergie avec le réservoir de température. Donc E fluctue autour de sa valeur moyenne $\langle E \rangle$, les autres paramètres N et V restent fixe

2) Z = somme sur tous les états $= \sum_{(i)} e^{-\beta E_i}$

3) $p_i = \dfrac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$

4) $\langle E \rangle = -\left(\dfrac{\partial(\ln Z)}{\partial \beta}\right)_{V,N}$ $\qquad \langle E \rangle = \sum_{(i)} p_i E_i = \dfrac{1}{Z} \sum_{(i)} E_i e^{-\beta E_i}$

5) $S_i = -\sum_{(i)} p_i \ln p_i$

$$S^c = -k_B \sum_{(i)} \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \ln\left(\frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}\right)$$

$$S^c = +\frac{k_B}{Z} \ln Z \sum_{(i)} e^{-\beta E_i} + \frac{k_B \beta}{Z} \sum_{(i)} e^{-\beta E_i} E_i$$

II. 1) $\{x, p_x\}$ dimension 2

2) $\phi^*(E) = \dfrac{\Gamma(E)}{h} = \dfrac{\int_0^L dx \int_{-\infty}^{\infty} dp_x}{h} = \dfrac{Lp}{h} = \dfrac{LE}{hc}$

3) $\Phi^*(E) = \dfrac{\partial \phi^*(E)}{\partial E} dE = \dfrac{L}{hc} dE = \rho(E)\, dE$

4) $\rho(E) = \dfrac{L}{hc}$

III

1)

$$\Omega(E,N) = \frac{\text{nb de permutations entre les } (N-1+n) \text{ boules}}{\text{nb de permutations entre les } (N-1) \text{ boules noires} \times \text{nb permut entre } n \text{ boules blanches}}$$

$$= \frac{(N-1+n)!}{(N-1)!\; n!} \sim \frac{(N+n)!}{(N!)\; n!} = C_{N+n}^{n}$$

2) $S^* = k_B \ln \Omega = k_B \ln (N+n)! - k_B \ln N! - k_B \ln n!$

$S^* = k_B \{(N+n) \ln (N+n) \cancel{-(N+n)} - N \ln N \cancel{+N} - n \ln n \cancel{+n}\}$

$S^* = k_B \{ N \ln (N+n) - N \ln N + n \ln (N+n) - n \ln n \}$

$S^* = k_B \left\{ N \ln \left(\dfrac{N+n}{N}\right) + n \ln \left(\dfrac{N+n}{n}\right) \right\}$

3°) $S^* \simeq k_B \left\{ N \ln \left(1 + \dfrac{n}{N}\right) + n \ln \left(1 + \dfrac{N}{n}\right) \right\}$

$n \to 0 \qquad S^* \to$

$n \to \infty \qquad S^* \to k_B N \ln \left(1 + \dfrac{n}{N}\right) \to N k_B \ln \dfrac{n}{N}$

$S^* \to N k_B \ln n \qquad S^*$

$$\frac{1}{T^*} = \left(\frac{\partial S^*}{\partial E}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial S^*}{\partial n}\right)_{V,N} \left(\frac{\partial n}{\partial E}\right)_{V,N} = \left(\frac{\partial S^*}{\partial n}\right)_{V,N} \frac{1}{\hbar \omega}$$

$\left(\frac{\partial S^*}{\partial n}\right) > 0$ $\quad S^*$ função crescente de n

$$\Rightarrow \frac{1}{T^*} > 0 \qquad T^* > 0$$

$$\frac{1}{T^*} = \frac{k_B}{\hbar\omega} \frac{\partial}{\partial n}\left[N \ln\left(\frac{N+n}{N}\right) + n \ln\left(\frac{N+n}{n}\right)\right]$$

$$\frac{1}{T^*} = \frac{k_B}{\hbar\omega}\left[\cancel{\frac{N}{N+n}} - \cancel{\frac{N}{N}} + \ln\left(\frac{N+n}{n}\right) + \cancel{n\frac{1}{N+n}} - \cancel{\frac{n}{n}}\right]$$

$$\frac{1}{T^*} = \frac{k_B}{\hbar\omega} \ln\left(\frac{N+n}{n}\right)$$

$$(N+n) > n \Rightarrow \ln\left(\frac{N+n}{n}\right) > 0 \Rightarrow T^* > 0$$

$$\frac{N+n}{n} > 1$$

5) $$\frac{k_B T^*}{\hbar\omega} = \frac{1}{\ln\left(\frac{N+n}{n}\right)}$$

$$e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T^*}} = \frac{N+n}{n} \Rightarrow n\, e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} = N+n$$

$$n\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1\right) = N$$

$$\boxed{n = \frac{N}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}} \Rightarrow E = \frac{N\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$